

REFLEXÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE OS PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

Barbara L. Bianchini & Silvia D. A. Machado

barbara@pucsp.br & silviaam@pucsp.br

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP – Brasil

Tema: Pensamento Algébrico

Modalidade CB

Nível educativo: Formação e Atualização docente

Palavras-chave: formação continuada de professores, pensamento matemático avançado, modelo 3 UV

Resumo:

Dada a atual crise do ensino de matemática no Brasil, frequentemente alardeada pelos meios de comunicação, são imprescindíveis pesquisas sobre os atores envolvidos nesse processo, dessa forma, pesquisas sobre a formação contínua de professores são relevantes. O artigo apresenta os resultados de um estudo de caso (André, 2005) realizado em três encontros de duas horas cada um, com doze professores de matemática em formação continuada. O estudo teve o objetivo de pesquisar se o sujeito participante do experimento enriqueceria suas reflexões sobre os próprios recursos mentais e representacionais após estudar os diferentes usos da variável (Ursini et al, 2005) na perspectiva dos processos do pensamento matemático avançado (Dreyfus, 1991). Os resultados revelam que os sujeitos passaram de uma reflexão inicial focada nos processos puramente algorítmicos a uma reflexão mais profunda, envolvendo os diferentes usos das variáveis relacionadas aos processos mentais e representacionais do pensamento matemático avançado.

Introdução

Dada a atual crise do ensino de matemática no Brasil, frequentemente alardeada pelos meios de comunicação, são imprescindíveis pesquisas sobre os atores envolvidos nesse processo, dessa forma, pesquisas sobre a formação contínua de professores são relevantes.

Segundo Dreyfus (1991) é importante para o professor de matemática ter consciência dos processos envolvidos no pensamento matemático para que compreenda algumas das dificuldades enfrentadas por seus alunos. Além disso, nessa mesma direção, porém especificamente, Ursini *et al* (2005) salientam a importância de que os professores reflitam acerca dos diferentes usos da variável em matemática.

Refletindo sobre questões do Pensamento Matemático Avançado – PMA –, do livro editado por Tall (1991), constatamos que as ideias de Dreyfus sobre os processos do PMA poderiam ser enriquecidas, no caso de problemas essencialmente algébricos. pelo modelo desenvolvido por Ursini *et al* (2005) sobre os diferentes usos da variável em matemática.

Isso nos levou a investigar o potencial de propiciar ao professor, tanto a conscientização da importância da seleção de situações-problema que possibilitem o aluno a vivenciar diferentes usos da variável, quanto compreender quais as situações favoráveis ao aluno para o desenvolvimento de processos do pensamento matemático avançado – PMA – ademais compreender melhor algumas das dificuldades que seus alunos enfrentam ao serem expostos a essas situações.

Neste artigo apresentamos parte de uma pesquisa que teve por objetivo investigar se professores de matemática participantes do experimento enriqueceriam suas reflexões sobre os próprios recursos mentais e representacionais após estudarem os diferentes usos da variável (Ursini *et al*, 2005) na perspectiva dos processos do pensamento matemático avançado (Dreyfus, 1991). O que nos levou a uma pesquisa qualitativa com as características de um estudo de caso (André, 2005).

O experimento

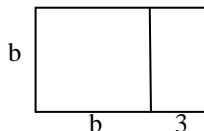
O experimento foi realizado em três encontros de duas horas cada um, com doze professores de matemática em formação continuada. No primeiro encontro, solicitamos aos sujeitos organizados em duplas, que resolvessem quatro situações-problema contextualizadas na matemática e descrevessem os tipos de recursos mentais e representacionais que empregaram nessas resoluções. No segundo encontro, discutiu-se o texto de Dreyfus (1991) sobre os principais processos do PMA, quais sejam: os processos de *abstrair* (generalizar e sintetizar) e *representar* (alternar e interpretar, modelizar) além do processo de validar. E no último encontro foram discutidos os diferentes usos da variável como: incógnita, número genérico, ou em uma relação funcional. Em seguida devolvemos os protocolos do primeiro encontro, com as situações-problema já resolvidas e analisadas pelas duplas e solicitamos que cada dupla analisasse novamente tanto a resolução quanto a descrição dos recursos materiais utilizados, agora levando em conta os processos do PMA e dos diferentes usos da variável.

A seguir descrevemos e analisamos os protocolos de uma das situações-problema propostas.

Quadro 1: atividade 3

Resolvam o seguinte problema (*retirado da p. 135 do livro de Ursini et al*), observando e refletindo, quais recursos materiais e mentais utilizaram para tal resolução. Registrem os recursos percebidos.

A área da seguinte figura é 27 cm^2 . Qual é a área do quadrado de lado b , se a base do retângulo da direita mede 3 cm ?



A **dupla 1**, no primeiro encontro, interpretou e resolveu a situação sem maiores problemas, chegando ao valor da área do quadrado $\frac{63-9\sqrt{13}}{2} \text{ cm}^2$. E descreveu como recursos mentais e representacionais utilizados:

Quadro 2: protocolo do encontro 1 da dupla 1

* Área do retângulo $a \cdot b$
* Resolução de equação de grau 2

No entanto no último encontro ao rever o mesmo protocolo apresentou a seguinte análise:

Quadro 3 : protocolo do encontro 3 da dupla 1

No exercício proposto é possível observar que é necessário estabelecer interligações entre a visualização, generalização e abstração para solucionar a questão. Associadas ao processo de aprendizagem relacionado às quatro fases entre o ato de representar e o ato de abstrair:

Item a: Uso de uma representação única (os processos começam a partir de um caso concreto, uma única representação),

Item b, c e d: Uso de mais de uma representação em paralelo (várias representações do mesmo conceito dependem de forma essencial sobre as relações entre as representações que são formadas),

Item e, f e g: Estabelecimento de ligações entre as representações paralelas (o estabelecimento das ligações da segunda fase constituem a terceira fase, ou seja, as fortes ligações permitem aos alunos mudar de representações, o que os torna conscientes do conceito subjacentes e, portanto susceptível de influenciar positivamente a abstração),

Item h: Integração entre representações e mudança flexível entre elas (um processo de interligação entre as diversas representações).

A comparação entre os quadros 2 e 3 evidencia o aprofundamento da dupla 1 em relação a sua percepção dos recursos utilizados na resolução da atividade proposta. A dupla passou da percepção meramente procedimental (quadro 2) para uma percepção mais aprofundada que levou em conta tanto o processo de abstração quanto de representação.

Quadro 4: protocolo do encontro 3 da dupla 1

2) A área da seguinte figura é 27 cm^2 . Qual é a área do quadrado de lado b , se a base do retângulo da direita mede 3 cm ?

- Leitura e interpretação das informações da questão proposta; \mathbb{I}_3
- Reconhecimento e análise da figura; $\mathbb{G}_3, \mathbb{G}_1$
- Uso das propriedades dos retângulos; $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_3$
- Cálculo da área do retângulo ($A=b \cdot (b+3)$); $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_3$
- Reconhecimento da equação do 2º grau $27 = b^2 + 3b$; \mathbb{I}_4
- Interpretação do resultado de b ; \mathbb{I}_3
- Cálculo da área do quadrado a partir do resultado de b ($A = b^2$); \mathbb{I}_3

Em relação a identificação do uso da variável **b**, a dupla evidenciou seu papel como incógnita e como número genérico. Pela descrição notamos que a dupla interpreta o termo deduzir do item G3, *deduzir regras dos padrões observados*, de forma idiossincrática, pois em sua resolução não houve necessidade de G3.

O protocolo da **dupla 2** relativo ao do 1º encontro, mostra que resolveram a atividade sem descartar o valor negativo da medida do lado b, isto é, considerou também que b poderia ter a medida igual a $\frac{-3-3\sqrt{13}}{2}$. Assim o par encontrou dois valores distintos

para a medida da área do quadrado de lado b: $\frac{63-9\sqrt{13}}{2}$ e $\frac{63+9\sqrt{13}}{2}$. No entanto é

interessante notar que a dupla finalizou tentando utilizar o processo de validação ao substituir os dois valores encontrados para a medida do lado b, inclusive a medida negativa, na expressão 3b. No protocolo do 1º encontro não há registro sobre os recursos utilizados na resolução da atividade.

No 3º encontro a dupla 2 apresentou sua análise sobre os recursos empregados na resolução dessa atividade, conforme o quadro 5 abaixo:

Quadro 5 : protocolo do encontro 3 da dupla 2

Para resolução da 2ª questão foi necessária a interpretação da questão e remeter-se ao conceito sobre o cálculo de áreas de um quadrilátero, mais especificamente um retângulo e um quadrado. Foi necessário escrever de forma algébrica o cálculo e a resolução remeteu-se numa equação do 2º grau. (REPRESENTAÇÃO)

O pensamento avançado ocorreu na identificação do que era solicitado havendo a abstração do conceito e a forma de representá-lo. Houve a validação com a volta aos cálculos substituindo os valores encontrados na expressão inicial para resolução da questão.

O registro acima permite inferir que os membros da dupla refletiram sobre os processos do PMA que utilizaram para resolver a situação proposta. Identificaram os processos de abstração, representação e validação utilizados. A linguagem adotada pela dupla ainda mostra certa ambiguidade o que não impede notar que seus membros refletiram mais profundamente sobre os recursos utilizados na resolução da atividade.

Embora a dupla 2 tenha dado mostras de que percebeu o uso da variável **b** como incógnita e como número genérico, seus membros não registraram suas reflexões sobre os diferentes usos da variável.

O protocolo da **dupla 3** produzido no 1º encontro, traz a resolução da atividade da maneira tradicional, somente utilizando símbolos matemáticos apresentando o valor da área do quadrado como $\frac{63+9\sqrt{13}}{2}$. Tal resultado é devido a um engano no último cálculo da medida da área do quadrado, e talvez a falta da unidade de medida se deva à resolução puramente algébrica do problema. O protocolo não traz registro sobre

recursos mentais e representacionais. Já no 3º encontro a dupla 3 mostra que foi sensibilizada pelos textos sobre os processos do PMA conforme se verifica no quadro 6 seguir .

Quadro 6: protocolo do encontro 3 da dupla 3

Inicialmente já **abstrairmos** ao saber que, independente da representação figural, tínhamos um quadrado de lado b e utilizamos a **generalização** ao escrevermos que a área de qualquer retângulo é o produto de seus lados.

$$(b + 3).b = 27$$

Para a resolução utilizamos a **representação** algébrica das medidas. Pois eram as técnicas que tínhamos a disposição (produto do polinômio). Por sua vez, o resultado desse produto é equação do 2º grau. Conceito já **abstraído** por nós, assim como também é conhecido um dos métodos de encontrarmos as raízes. (fórmula de Baskara)

Ao final, por meio da **validação**, percebemos que só seria válida uma das medidas encontradas para a medida do lado do quadrado. (raiz inteira positiva)

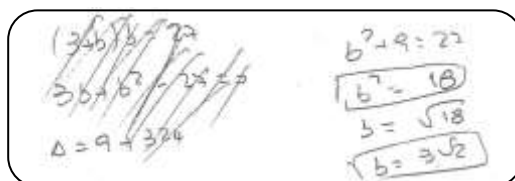
Nota-se um esforço no sentido de expressar os recursos utilizados segundo os processos discutidos. No entanto, os membros fizeram uma interpretação idiossincrática dos termos abstração e validação. O termo validar foi utilizado com o sentido de que estavam atentos ao fato de que b significava uma medida, portanto não poderia ser negativa. Naturalmente isso indica que é preciso maior amadurecimento sobre o assunto tratado. Quanto à análise dos diferentes usos da variável b a dupla identificou o aspecto de valor genérico e de incógnita, conforme quadro 7 a seguir.

Quadro 7: protocolo do encontro 3 da dupla 3

Usos da variável : • A variável como valor genérico. (G4)
• A variável como incógnita (I1, I2, I4)

O protocolo da **dupla 4** revela que embora seus elementos tenham iniciado a resolução representando algebricamente a área do retângulo por : $(3+b)b = 27$, optaram por outra representação: $b^2 + 9 = 27$, o que os levou a dar como medida do lado do quadrado $b = 3\sqrt{2}$.

Quadro 8: protocolo do encontro 1 da dupla 4



É interessante comparar as reflexões sobre os recursos empregados feitas pela dupla no primeiro e terceiro encontros:

Quadro 9 : digitação do protocolos dos encontros 1 e 3 da dupla 4

1º encontro	3º encontro
<ul style="list-style-type: none"> - conceito de área (quadrado e retângulo) - conceito de equação - visualização - abstração 	<ul style="list-style-type: none"> - Generalização do quadrado - Utilização da variável como incógnita - Representação da área por uma sentença - Abstração

A comparação possibilitada pelo quadro 9 evidencia que a dupla incorporou termos mais adequados aos recursos utilizados como o de *representar* algebricamente o problema ao invés de *conceito de equação*, além de indicar que a variável *b* assumiu o papel de incógnita.

O protocolo da **dupla 5**, mostra uma resolução adequada da atividade, onde foi descartada o valor negativo da medida do lado do quadrado, oportunizando o seguinte

resultado : *Área do quadrado* $\left(\frac{126 - 18\sqrt{13}}{4} \right) cm^2$. Quanto aos recursos utilizados na

resolução a dupla mencionou apenas: *Recursos mentais* seguido da palavra *resolução*. O que evidencia uma interpretação singular da expressão '*recursos mentais*'.

Já no terceiro encontro a dupla 5, refinou sua análise sobre os recursos utilizados na resolução da atividade, do ponto de vista dos processos do PMA, conforme quadro abaixo.

Quadro 10: protocolo do encontro 3 da dupla 5

→ <u>Recursos mentais</u> Resolução <u>Representação</u> # Alternando e traduzindo representações <u>Abstração</u> Definição e abstração	<u>3UV</u> I ₁ , I ₂ , I ₅
---	--

Nota-se que em relação ao processo de representação a dupla entendeu que usou somente a ação de alternar e interpretar, a palavra *definição* utilizada como parte do processo de abstração, provavelmente se refere ao conhecimento da expressão da área do retângulo. Embora tenha havido um refinamento da reflexão da dupla sobre os recursos usados, do 1º para o 3º encontro, a reflexão ainda se mostrou um tanto incipiente, exigindo mais aprofundamento.

Em relação aos diferentes usos da variável a dupla indicou a variável como incógnita em três diferentes aspectos: I₁, I₂ e I₅.

A **dupla 6**, que participou somente dos dois últimos encontros, apresentou somente o protocolo do último encontro, e as reflexões e resolução da atividade ocorreram após o

estudo do texto sobre os processos do PMA. O protocolo da dupla apresenta uma manipulação algebricamente correta da expressão $b^2+3b=27$ finalizada pela expressão $b^2 = \frac{63-9\sqrt{3}}{2}$. Após essa resolução a dupla registrou o que segue:

Quadro 11: protocolo do encontro 3 da dupla 6

<u>Processos</u>	
Alternar e traduzir representação	
Modelagem	
Generalização	
Abstração	
<u>Variável</u>	
I1	G2
I2	G4
I4	
I5	

Em relação ao processo de representar a dupla observou ter utilizado *alternação e tradução*, e *modelação*; quanto ao processo de abstrair, a dupla percebeu que generalizou. É interessante notar que, embora tenham sintetizado, não reconheceram a utilização desse processo. Quanto aos diferentes usos da variável, a dupla percebeu tanto os usos da variável como incógnita, quanto como número genérico.

Conclusão

No primeiro encontro, das cinco duplas presentes, apenas três apresentaram uma análise sobre os recursos mentais e representacionais empregados na resolução da atividade proposta. Essas três duplas registraram recursos matemáticos, tais como “área do retângulo a.b” ou “conceito de área (quadrado e retângulo)” e apenas uma delas acrescentou os termos “visualização” e “abstração”. No segundo encontro, com seis duplas, discutiu-se o texto sobre o Pensamento Matemático Avançado. No terceiro encontro, após discussão do texto sobre os diferentes usos da variável, solicitamos que retomassem os respectivos protocolos sobre os processos do PMA utilizados na resolução da atividade, e nos mesmos acrescentassem quais os diferentes usos da variável estavam presentes em suas resoluções.

Os protocolos das seis duplas relativos ao 3º encontro revelam que 5 duplas referiram que utilizaram o processo de representação e 3 duplas citaram o processo de abstração. Ao refinar o processo de representação, 3 duplas mencionaram o processo de alternar e interpretar e uma delas percebeu que usou o processo de modelar. No refinamento do processo de abstração, 3 duplas apontaram o processo de generalizar. É importante citar

que algumas duplas descreveram outros processos, como duas duplas o de validar, um deles expressando um sentido diferente daquele dado pelo texto, uma dupla indicou o processo de visualizar.

Quanto aos diferentes usos da variável, 5 duplas identificaram o papel da variável como incógnita e três delas perceberam o papel da variável como número genérico. Apenas uma dupla não apresentou sua análise sobre os diferentes usos da variável.

É nítida a diferença da reflexão antes e depois das discussões dos textos. Alguns professores declararam no terceiro encontro que “nunca fizemos uma análise dessa forma sobre uma resolução!”, um deles acrescentou: “mudei minha forma de avaliar uma resolução do aluno”.

Na realidade, percebemos uma evolução nas análises registradas pelas duplas entre o primeiro e o último encontro, embora umas tenham se aprofundado mais do que outras passando de uma reflexão inicial focada nos processos puramente algorítmicos a uma reflexão mais profunda, envolvendo os diferentes usos das variáveis relacionadas aos processos mentais e representacionais do pensamento matemático avançado.

Acreditamos que os resultados desta pesquisa constituem apenas o início da tentativa de que professores se apropriem das ideias do PMA e dos diferentes usos da variável para aprofundar suas reflexões sobre a resolução de atividades algébricas suas e de seus alunos. Certamente é necessário mais tempo, prática e discussão para a apropriação dessas ideias de uma forma mais ampla.

Finalizamos corroborando frase de Alarcão (2004, p.39) “Termino, recorrendo [...] à convicção de Morin de que é preciso organizar o pensamento para compreender e poder agir. É esta ideia que é preciso introduzir nos paradigmas de formação das pessoas e de funcionamento das instituições”.

Referencias bibliográficas

- Alarcão, I. (2004). *Professores Reflexivos em uma escola reflexiva*. São Paulo: Cortez.
- André, M.E.D.A. (2005). *Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional*. Brasília: Líber.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. En: TALL, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer.
- Tall, D. (1991) *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer.
- Ursini, S. & Escareño, F. & Montes, D. & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza de álgebra elemental: una propuesta alternativa*. Mexico: Trillas.